

Επιστημονικός Υπολογισμός – Άνοιξη 2009
QUIZ 4: ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ
ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Επώνυμο..... ΌνομαΕξάμηνο.....

19 Μαρτίου 2009

Βασικές έννοιες, μέθοδοι, θεωρήματα για προσέγγιση συναρτήσεων και δεδομένων

1. Θεώρημα του Taylor
2. Θεώρημα του Weirstrass
3. Πολυώνυμα (βαθμός, διάσταση - βάσεις, ρίζες)
4. Πρόβλημα παρεμβολής με πολυώνυμα – διατύπωση – εξισώσεις παρεμβολής
5. Μέθοδοι παρεμβολής Vandermode, Lagrange, Newton – προσδιορισμός πολυωνύμου παρεμβολής
6. Βάσεις πολυωνύμου παρεμβολής
7. Αξιολόγηση μεθόδων παρεμβολής (Πολυπλοκότητα, Πλεονεκτήματα - Μειονεκτήματα μεθόδων παρεμβολής)
8. Σφάλμα παρεμβολής με πολυώνυμα - άνω φράγμα - Σύγκλιση - Εξάρτηση σφάλματος - O - συμβολισμός
9. Τμηματικά πολυώνυμα (διαμέριση-κόμβοι-μήκος, βαθμός, διάσταση, βαθμός συνέχειας, βάσεις)
10. Πρόβλημα παρεμβολής με τμηματικά πολυώνυμα (εξισώσεις συνέχειας, εξισώσεις παρεμβολής, συνοριακές συνθήκες)
11. Παραδείγματα τμηματικών πολυωνύμων: Γραμμικά, Παραβολικά, Κυβικές Splines
12. Σφάλμα παρεμβολής με τμηματικά πολυώνυμα - Σύγκλιση - εξάρτηση σφάλματος
13. Παρεμβολή με τριγωνομετρικά πολυώνυμα (σημειώσεις 3 μέθοδοι)
14. Παρεμβολή με τριγωνομετρικά πολυώνυμα στις μοναδιαίες ρίζες – εξισώσεις παρεμβολής - FFT – αλγόριθμος – πολυπλοκότητα πολλαπλασιασμός πινάκων – διανυσμάτων
15. Πρόβλημα προσέγγισης δεδομένων με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων
16. Προσέγγιση δεδομένων με ένα γραμμικό μοντέλο (πολυώνυμο) με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων - Εξισώσεις προσδιορισμού του μοντέλου

QUIZ #4

1. Η εύρεση της «καλύτερης» προσέγγισης $y = f(x)$ των σημείων $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων απαιτεί την ελαχιστοποίηση της

(A) $\sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]$

(B) $\sum_{i=1}^n |y_i - f(x_i)|$

(C) $\sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2$

(D) $\sum_{i=1}^n [y_i - \bar{y}]^2, \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$

2. Θεωρείστε την προσέγγιση των σημείων του πίνακα

x	1	20	30	40
y	1	400	800	1300

με το γραμμικό πολυώνυμο $y = a_0 + a_1x$. Η τιμή του a_1 είναι ποιο κοντά

- A) 27.480
- B) 28.956
- C) 32.625
- D) 40.000

3. Θεωρείστε την προσέγγιση των σημείων του πίνακα

x	1	20	30	40
y	1	400	800	1300

με το γραμμικό πολυώνυμο $y = a_1x$. Η τιμή του a_1 είναι ποιο κοντά

- A) 27.480
- B) 28.956
- C) 32.625
- D) 40.000

4. Ποια είναι το «καλύτερο» γραμμικό πολυώνυμο που προσεγγίζει τα παρακάτω σημεία σύμφωνα με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων

x	1	10	20	30	40
y	1	100	400	600	1200

- A) $y = 60x - 1200$
- B) $y = 30x - 200$
- C) $y = -139.43 + 29.684x$
- D) $y = 1 + 22.782x$

5. Για την εύρεση του γραμμικού μοντέλου προσέγγισης $y = a_0 + a_1x$ των n δεδομένων $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ απαιτείται η εύρεση του ελάχιστου των τετραγώνων των υπολοίπων

$$S_r = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i)^2$$

A. Ποιες είναι οι συνθήκες για την ελαχιστοποίηση του S_r ; Να βρεθούν οι τιμές των συντελεστών του γραμμικού μοντέλου που ικανοποιούν τις συνθήκες αυτές.

B. Αν (a,b) είναι ένα σημείο που ικανοποιεί τις συνθήκες ελαχιστοποιήσεως της $f(x,y)$ τότε (a,b) είναι ελάχιστον αν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0, \text{ και}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \text{ ή } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$$

Να αποδειχθεί ότι η S_r έχει ελάχιστο.

Γ. Η λύση του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων είναι μοναδική; Γιατί;

6. Θεωρείστε τα δεδομένα

x	y
2.0	4.0
3.0	6.0
2.0	6.0
3.0	8.0

Η ποιότητα της προσέγγισης αυτών των δεδομένων με $a_0 + a_1x$ είναι το μέγεθος σφάλματος E_i σε κάθε σημείο των δεδομένων σημείων

$$E_i = y_i - (a_0 + a_1x_i)$$

A) να προσδιορισθεί το γραμμικό πολυώνυμο που ελαχιστοποιεί $\sum_{i=1}^n E_i$. Είναι μοναδικό;

B) να προσδιορισθεί το γραμμικό πολυώνυμο που ελαχιστοποιεί $\sum_{i=1}^n |E_i|$

7. Θεωρείστε το πολυώνυμο βαθμού 4 που παρεμβάλει μια συνάρτηση $y=f(x)$ στις ρίζες της μονάδος ($x^4 = 1$).

α) Αποδείξτε ότι οι ρίζες της $x^4 = 1$ είναι $e^{jk\pi/4}$ για $k=0,1,2,3$.

β) Αποδείξτε τις παρακάτω σχέσεις για τις n -οστες ρίζες της μονάδος

$$\omega^n = 1, \quad e^{2\pi i k/n} \text{ για } k=0, 1, \dots, n-1 \quad e^{iu} = \cos u + i \sin u$$

ι) Αν $\omega_n = e^{2\pi i/n}$, η κύρια n -th ρίζα της μονάδος τότε οι διαφορετικές (σημειώστε ότι ο κάτω δείκτης στο συμβολισμό συμβολίζει τον εκθέτη n -οστή ρίζα) ρίζες της μονάδος δίδονται από τις δυνάμεις

$$\omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}$$

ιι) Να αποδειχθούν οι παρακάτω σχέσεις

$$\omega_n^n = ?, \quad \omega_n^0 = 1$$

$$\omega_n^j \omega_n^k = \omega_n^{(j+k) \bmod n}$$

$$\omega_n^{-1} = \omega_n^{n-1}$$

ιιι) για κάθε μη αρνητικούς ακεραίους

$$\omega_{dn}^{dk} = \omega_n^k$$

ιiv) για κάθε άρτιο θετικό ακέραιο n ισχύει

$$\omega_n^{n/2} = \omega_2 = -1$$

v)

n: Άρτιος Θετικός

Τα τετράγωνα των n-th μιγαδικών ριζών της μονάδος είναι n/2 μιγαδικές (n/2)-th ρίζες της μονάδος.

$$(\omega_n^k)^2 = \omega_n^{2k} = \omega_{n/2}^k, \text{ όπου } k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

$$(\omega_n^{k+n/2})^2 = \omega_n^{2k+n} = \omega_n^{2k} = \omega_{n/2}^k$$

$\Rightarrow \omega_n^k$ και $\omega_n^{k+n/2}$ έχουν το ίδιο τετράγωνο

γ) Αποδείξτε το σύστημα Vandermode για την εύρεση του παραπάνω πολωνύμου είναι

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$y = V_n a, \quad (V_n)_{k,j} = \omega_n^{kj}$$

$$a = V_n^{-1} y$$

δ) Να αποδειχθεί ότι τα στοιχεία του αντίστροφου V_n^{-1} είναι $j, k = 0, 1, \dots, n-1$, $(V_n^{-1})_{j,k} = \omega_n^{-kj} / n$

ε) Υπολογίστε το πολυνύμο παρεμβολής $A(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$ στις ρίζες $\omega_n^0, \omega_n^1, \dots, \omega_n^{n-1}$,

Υποθέστε ότι n είναι δύναμη του 2

Έστω $a = \langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$, και $y_k = A(\omega_n^k) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega_n^{kj}$

$y = \langle y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \rangle$ είναι ο διακριτός Fourier μετασχηματισμός (DFT)

του διανύσματος των συντελεστών

$$a = \langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle,$$

$$y = \text{DFT}_n(a)$$

Να εφαρμοσθεί ο FFT αλγόριθμος για n=4. Να δειχθούν όλα τα βήματα του αλγορίθμου. Σημειώστε ότι ο αλγόριθμος βασίζεται στην εξής divide and conquer στρατηγική

$$A^{[0]}(x) = a_0 + a_2x + a_4x^2 + \dots + a_{n-2}x^{n/2-1}$$

$$A^{[1]}(x) = a_1 + a_3x + a_5x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n/2-1}$$

$$(*) \quad A(x) = A^{[0]}(x^2) + xA^{[1]}(x^2)$$

Έτσι ο υπολογισμός του $A(x)$ στα $\omega_n^0, \omega_n^1, \dots, \omega_n^{n-1}$ ανάγεται στα βήματα

1. υπολογισμό $A^{[0]}(x)$ και $A^{[1]}(x)$ στα

$$(\omega_n^0)^2, (\omega_n^1)^2, \dots, (\omega_n^{n-1})^2$$

2. σύμπτυξη των αποτελεσμάτων σύμφωνα με (*)

$$\text{Έστω} \begin{cases} y_k^{[0]} = A^{[0]}(\omega_{n/2}^k) \\ y_k^{[1]} = A^{[1]}(\omega_{n/2}^k) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_k &= A(\omega_n^k) = A^{[0]}(\omega_n^{2k}) + \omega_n^{2k} A^{[1]}(\omega_n^{2k+n}) \\ &= A^{[0]}(\omega_{n/2}^k) - \omega_n^k A^{[1]}(\omega_{n/2}^k) \\ &= y_k^{[0]} + \omega_n^k y_k^{[1]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{k+n/2} &= A(\omega_n^{k+n/2}) = A^{[0]}(\omega_n^{2k+n}) + \omega_n^{k+n/2} A^{[1]}(\omega_n^{2k}) \\ &= A^{[0]}(\omega_{n/2}^k) + \omega_n^{k+n/2} A^{[1]}(\omega_{n/2}^k) \\ &= y_k^{[0]} + \omega_n^{k+n/2} y_k^{[1]} = y_k^{[0]} - \omega_n^k y_k^{[1]} \end{aligned}$$

Recursive-FFT(a)

{ n=length[a]; /* n: power of 2 */

if n=1 the return a;

$$\omega_n = e^{2\pi i/n};$$

$\omega=1$

$$a^{[0]} = (a_0, a_2, \dots, a_{n-2});$$

$$a^{[1]} = (a_1, a_3, \dots, a_{n-1});$$

$$y^{[0]} = \text{Recursive-FFT}(a^{[0]});$$

$$y^{[1]} = \text{Recursive-FFT}(a^{[1]});$$

for k=0 to (n/2 - 1) do

{

$$y_k = y_k^{[0]} + \omega y_k^{[1]};$$

$$y_{k+n/2} = y_k^{[0]} - \omega y_k^{[1]};$$

$$\omega = \omega \omega_n; \quad \}$$

}